角の二等分線の傾きに関する不定方程式とペル方程式の解のなす数列

廣津 孝

2022 年 9 月 19 日 (Ver. 2.1)

1　はじめに

座標平面において, 傾きが 1, 7 の 2 直線のなす鋭角の二等分線の傾きは整数 2 である.*1 この他にも, 例えば傾きが次のような場合に, 2 直線のなす鋭角の二等分線の傾きは整数になる.*2

2 直線の傾き	1	1	2	3	4	5	6	7	7	7	8	9
	7	-7	38	117	268	515	882	41	1393	-41	2072	2943
角の二等分線の傾き	2	3	4	6	8	10	12	12	14	17	16	18

一般に, 2 直線がなす角の二等分線の傾きについて, 次のような問題が考えられる.

問題 1. どのような整数 (有理数) a, b ($b \neq \pm a$) に対して, 2 直線 $y = ax$, $y = bx$ のなす角の二等分線 $y = cx$ の傾き c は整数 (有理数) になるか.

この問題は,「与えられた格子点 O, A, B に対して, 2 直線 OA, OB のなす角の 2 等分線が O と他の格子点 C を結ぶことで描けるのはいつか」という意味をもち, 描画の技術上重要な問題である. 次の命題により, この問題は不定方程式

$$(a-c)^2(b^2+1) = (b-c)^2(a^2+1) \tag{$\star$}$$

の $b \neq \pm a$ なる整数解 (有理数) を求める問題に他ならない.

命題 1. a, b, c ($b \neq \pm a$) を実数とする. 2 直線 $y = ax$, $y = bx$ のなす角の二等分線が $y = cx$ であるとき, a, b, c は ($\star$) を満たす.

証明. 二等分線 $y = cx$ 上の点 (t, ct) ($t \neq 0$) と 2 直線 $ax - y = 0$, $bx - y = 0$ の距離は等しいから,

$$\frac{|at-ct|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = \frac{|bt-ct|}{\sqrt{b^2+(-1)^2}} \quad \text{つまり} \quad |a-c|\sqrt{b^2+1} = |b-c|\sqrt{a^2+1}$$

が成り立つ. 両辺を 2 乗すると, ($\star$) が得られる. *3 □

($\star$) の解については, 次の性質が基本的である. $b = \pm a$ なる解 (a, a, c), $(a, -a, 0)$ を自明な解と呼ぶ.

命題 2. (1)　(a, b, c) が ($\star$) の実数解であるとき, (b, a, c), $(-a, -b, -c)$ も ($\star$) の実数解である.

(2)　$a = 0$ または $b = 0$ のとき, ($\star$) は非自明な整数解をもたない.

(3)　($\star$) の任意の非自明な整数解 (a, b, c) に対して, a, b が共通のペル方程式 $x^2 - dy^2 = -1$ の整数解の x 成分になるような, 平方因数をもたない正の整数 d が存在する.

証明. (1)　明らか.

---

*1 これらの直線の傾き 1, 7, 2 は, 高校の数学の教員の間ではよく知られている数値かもしれない.

*2 2 直線のなす角の 2 等分線は 2 本あり, それらは互いに垂直であるから, 一方の傾きが $c \neq 0$ であるとき, 他方の傾きは $-c^{-1}$ である.

*3 正接の加法定理, ベクトルの内積の公式による証明も可能である. ($\star$) は $(ac+1)^2(b^2+1) = (bc+1)^2(a^2+1)$ と同値である.

(2) $(\star)$ を c について解くと,

$$c = \frac{ab - 1 \pm \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}{a+b}$$

となる. 整数 $k \neq 0$ に対して $\sqrt{k^2+1}$ は整数になり得ないから, $a = 0$ または $b = 0$ のとき $(\star)$ は非自明な整数解をもたない.

(3) $(\star)$ の両辺の素因数分解を考える. $(a-c)^2, (b-c)^2$ は平方数であるから, 残りの各因数 a^2+1, b^2+1 について p 進付値が奇数であるような素因数 p (a^2+1, b^2+1 は平方数でないから必ず存在) の組合せは等しい. [*4] それらの素因数の積を d とおくと, $a^2+1 = da'^2, b^2+1 = db'^2$ $(a', b' \in \mathbb{Z})$ と表されるから, a, b は共通のペル方程式 $x^2 - dy^2 = -1$ の整数解の x 成分になる. □

$(\star)$ のすべての整数解を表す公式は, 次の通りである.

定理 1 (廣津, 2022)**.** ペル方程式 $x^2 - dy^2 = -1$ が整数解をもつような, 平方因数をもたない正の整数 d に対して, $|x^2 - dy^2| = 1$ の正の整数解のうち x 成分が n 番目に小さいものを $(x, y) = (p_n^{(d)}, q_n^{(d)})$ とおく. $(\star)$ の任意の非自明な整数解 (a, b, c) は, a, b の入れ替えを許せば, 適当な正の整数 d, m, n について

$$(a, b, c) = \pm\left(p_{(2m-1)(2n-1)}^{(d)}, p_{(2m-1)(2n+1)}^{(d)}, \frac{q_{2(2m-1)n}^{(d)}}{q_{2m-1}^{(d)}}\right), \tag{1.1}$$

$$\pm\,(p_{2n-1}^{(2)}, -p_{2n+1}^{(2)}, p_{2n}^{(2)}) \tag{1.2}$$

の形に表され, この形の (a, b, c) で $(\star)$ の整数解でないものはない. ただし, (1.1) は $d = 2$ の場合を含む.

注意. $x^2 - dy^2 = -1$ が整数解をもつような, 平方因数をもたない正の整数 d を小さい順に列挙すると,

$$2,\ 5,\ 10,\ 13,\ 17,\ 26,\ 29,\ 37,\ 41,\ 53,\ 58,\ 61,\ 65,\ 73,\ 74,\ 82,\ 85,\ 89,\ 97, \cdots$$

となる. このような d は 4 を法として 3 と合同な素因数をもたない. しかし, この条件は十分ではなく, 例えば $x^2 - 34y^2 = -1$ は整数解をもたない.

定理 1 の証明は, 2 節で準備を行った後に, 3 節で行う.

例 1. 与えられた正の整数 k に対して, $(\star)$ は整数解

$$(a, b, c) = \pm(k, k(4k^2+3), 2k)$$

をもつ. この $k, k(4k^2+3)$ は, ペル方程式 $|x^2 - (k^2+1)y^2| = 1$ の小さい方から 1 番目の解 $(x, y) = (k, 1)$, 3 番目の解 $(x, y) = (k(4k^2+3), 4k^2+1)$ の x 成分に等しい.

例 2. ペル方程式 $x^2 - 2y^2 = -1$ からは, 次のような $(\star)$ の整数解が得られる: (1.1) の形の解としては

$(p_1^{(2)}, p_3^{(2)}, q_2^{(2)}/q_1^{(2)})$ $= (1, 7, 2)$,	$(p_3^{(2)}, p_5^{(2)}, q_4^{(2)}/q_1^{(2)})$ $= (7, 41, 12)$,	$(p_5^{(2)}, p_7^{(2)}, q_6^{(2)}/q_1^{(2)})$ $= (41, 239, 70)$,
$(p_3^{(2)}, p_9^{(2)}, q_6^{(2)}/q_3^{(2)})$ $= (7, 1393, 14)$,	$(p_9^{(2)}, p_{15}^{(2)}, q_{12}^{(2)}/q_3^{(2)})$ $= (1393, 275807, 2772)$,	$(p_{15}^{(2)}, p_{21}^{(2)}, q_{18}^{(2)}/q_3^{(2)})$ $= (275807, 54608393, 548842)$,
$(p_5^{(2)}, p_{15}^{(2)}, q_{10}^{(2)}/q_5^{(2)})$ $= (41, 275807, 82)$,	$(p_{15}^{(2)}, p_{25}^{(2)}, q_{20}^{(2)}/q_5^{(2)})$ $= (275807, 1855077841, 551532)$,	$(p_{25}^{(2)}, p_{35}^{(2)}, q_{30}^{(2)}/q_5^{(2)})$ $= (1855077841, 12477253282759, 3709604150)$

のような解が, (1.2) の形の解としては

$(p_1^{(2)}, -p_3^{(2)}, p_2^{(2)})$ $= (1, -7, 3)$,	$(p_3^{(2)}, -p_5^{(2)}, p_4^{(2)})$ $= (7, -41, 17)$,	$(p_5^{(2)}, -p_7^{(2)}, p_6^{(2)})$ $= (41, -239, 99)$,	$(p_7^{(2)}, -p_9^{(2)}, p_8^{(2)})$ $= (239, -1393, 577)$,	$(p_9^{(2)}, -p_{11}^{(2)}, p_{10}^{(2)})$ $= (1393, -8119, 3363)$

のような解がある.

[*4] ここでは, 各素数 p に対して, 整数 $a \neq 0$ の素因数分解における p の指数を a の p 進付値と呼ぶ.

$(\star)$ の有理数解については, 次のことがわかっている.

定理 2 (廣津, 2022)**.** w を 4 以外の 4 の倍数, 奇数の合成数の 2 倍, または奇数の合成数とする. このとき, $v^2 + w^2 = v'^2$ は相異なる正の整数解 $(v, v') = (x, x'), (y, y')$ をもち, $(\star)$ はこれらの値を用いて表される有理数解

$$(a, b, c) = \pm\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{xy' + x'y}{w(y' + x')}\right),\ \pm\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{xy' - x'y}{w(y' - x')}\right) \tag{1.3}$$

をもつ.

定理 2 の証明は, 4 節で行う.

例 3. ピタゴラスの 3 つ組 $(5, 12, 13), (35, 12, 37)$ からは, $(\star)$ の有理数解

$$\left(\frac{5}{12}, \frac{35}{12}, \frac{5 \cdot 37 + 13 \cdot 35}{12(37 + 13)}\right) = \left(\frac{5}{12}, \frac{35}{12}, \frac{16}{15}\right), \quad \left(\frac{5}{12}, \frac{35}{12}, -\frac{15}{16}\right)$$

が得られる.

2　ペル方程式の解のなす数列

正の整数 d が平方因数をもたず, $x^2 - dy^2 = -1$ が整数解をもつとする. 実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ において, 基本単数を ε とおき, $\alpha = a + a'\sqrt{d}$ $(a, a' \in \mathbb{Q})$ と $\mathbb{Q}$ 上共役な数 $a - a'\sqrt{d}$ を $\tilde{\alpha}$ で表す. 仮定により $\varepsilon\tilde{\varepsilon} = -1$ であることに注意する. さらに, $p_n = p_n^{(d)}, q_n = q_n^{(d)}$ を定理 1 のように定める (この節では右肩の添え字 (d) は省略する). つまり, 数列 $(p_n), (q_n)$ は,

$$\varepsilon^n = p_n + q_n\sqrt{d} \tag{2.1}$$

で定まる整数列であり, 基本単数 $\varepsilon = p_1 + q_1\sqrt{d}$ の値と連立漸化式

$$p_{n+1} = p_n p_1 + d q_n q_1, \quad q_{n+1} = p_n q_1 + q_n p_1 \tag{2.2}$$

によっても定まる.*5 $p_0 = 1, q_0 = 0$ と定める. $d = 2$ の場合, p_n の形の整数はペル=リュカ数, q_n の形の整数はペル数として知られている.*6

この節では, 定理 1 の証明で用いる $(p_n), (q_n)$ の性質, またはそれに関連する性質について述べる. $d = 2$ とすればペル数, ペル=リュカ数の性質としてよく知られている事実も多いため, 証明は手短に述べる. 次の 3 つの命題は, 特によく知られている.

命題 3. 数列 $(p_n), (q_n)$ の一般項は

$$p_n = \frac{\varepsilon^n + \tilde{\varepsilon}^n}{2}, \quad q_n = \frac{\varepsilon^n - \tilde{\varepsilon}^n}{2\sqrt{d}} \tag{2.3}$$

と表される.

証明. (2.1) の両辺の $\mathbb{Q}$ 上共役な元をとると, $\widetilde{\varepsilon^n} = \tilde{\varepsilon}^n$ により,

$$\tilde{\varepsilon}^n = p_n - q_n\sqrt{d} \tag{2.1$'$}$$

となる. (2.1), (2.1)$'$ を p_n, q_n について解くと, 求める等式が得られる. □

命題 4. 数列 $(p_n), (q_n)$ は狭義単調増加であり, $p_n \geqq q_n$ が成り立つ. また, $p_1 \geqq \sqrt{d-1}$ である.

証明. 単調増加性は $d, p_1, q_1 > 0$ と連立漸化式 (2.2) から従う. $p_n > q_n$ は

$$p_{2n-1}{}^2 - dq_{2n-1}{}^2 = -1, \quad p_{2n}{}^2 - dq_{2n}{}^2 = 1 \tag{2.4}$$

---

*5 p_n/q_n は $\sqrt{d}$ の第 n 次近似分数に等しい.

*6 流儀によっては $2p_n$ をペル=リュカ数と呼ぶ.

よって

$$p_{2n-1}{}^2 = dq_{2n-1}{}^2 - 1 \geqq q_{2n-1}{}^2 \quad (\because (d-1)q_{2n-1}{}^2 \geqq 1),$$
$$p_{2n}{}^2 = dq_{2n}{}^2 + 1 > q_{2n}{}^2$$

であることから従う. また,

$$p_1 \geqq \sqrt{dq_1{}^2 - 1} \geqq \sqrt{d-1}$$

である. □

命題 5. m, n を $m \geqq n$ なる非負整数とする.

(1) 加法公式:

$$p_{m+n} = p_m p_n + dq_m q_n, \tag{2.5}$$
$$q_{m+n} = p_m q_n + q_m p_n, \tag{2.6}$$
$$p_{m-n} = (-1)^n (p_m p_n - dq_m q_n), \tag{2.7}$$
$$q_{m-n} = (-1)^{n+1} (p_m q_n - q_m p_n) \tag{2.8}$$

が成り立つ.

(2) 2 倍公式:

$$p_{2n} = p_n^2 + dq_n^2, \tag{2.9}$$
$$q_{2n} = 2p_n q_n \tag{2.10}$$

が成り立つ.

証明. (1) $\varepsilon^{m+n} = \varepsilon^m \varepsilon^n, \varepsilon^{m-n} = (-1)^n \varepsilon^m \widetilde{\varepsilon^n}$ の両辺の各因数を数列 $(p_n), (q_n)$ の項を用いて表すと,

$$\begin{aligned} p_{m+n} + q_{m+n}\sqrt{d} &= (p_m + q_m\sqrt{d})(p_n + q_n\sqrt{d}) \\ &= (p_m p_n + dq_m q_n) + (p_m q_n + q_m p_n)\sqrt{d}, \\ p_{m-n} + q_{m-n}\sqrt{d} &= (p_m + q_m\sqrt{d})(p_n - q_n\sqrt{d}) \\ &= (p_m p_n - dq_m q_n) - (p_m q_n - q_m p_n)\sqrt{d} \end{aligned}$$

となる. 1, $\sqrt{d}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立であることに注意して両辺を比較すると, 求める等式が得られる.

(2) (2.5), (2.6) において $m = n$ とすれば得られる. □

数列 (q_n) における整除関係は添え字の整除関係のみによって決まり, このことはペル数の性質としてよく知られている ([3, Theorem 8.4] 参照). 数列 (p_n) における整除関係についても, 同様の性質が成り立つ. それらをまとめると, 次のようになる. 以下, 整数 $p, q \neq 0$ の最大公約数を (p, q) で表す.

定理 3. m, n を $m \leqq n$ なる正の整数とする.

(1) $(d, p_n) = (p_n, q_n) = 1$ である.

(2) n が m の偶数倍であるならば, $(p_m, p_n) = 1$ である.

(3) 次は同値である.

 (P1) p_n は p_m で割り切れる.

 (P2) “$d = 2$ かつ $m = 1$” または n は m の奇数倍である.

(4) 次は同値である.

 (Q1) q_n は q_m で割り切れる.

 (Q2) n は m の倍数である.

証明. (1), (3) の (P2) ⇒ (P1), (2), (3) の (P1) ⇒ (P2), (4) の順に示す.

(1) (2.4) から従う.

(3) (P2) ⇒ (P1):

- $d = 2$ のとき, $\varepsilon = 1 + \sqrt{2}$ よって $p_1 = 1$ であるから, p_n は p_1 の倍数である.
- k を正の奇数とする.

$$\frac{\varepsilon^{mk} + \tilde{\varepsilon}^{mk}}{2} = \frac{\varepsilon^{m} + \tilde{\varepsilon}^{m}}{2}(\varepsilon^{m(k-1)} - \cdots + \tilde{\varepsilon}^{m(k-1)})$$

であるから, (2.3) により

$$\frac{p_{mk}}{p_m} = \varepsilon^{m(k-1)} - \cdots + \tilde{\varepsilon}^{m(k-1)} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$$

である. よって, p_{mk} は p_m で割り切れる.

(2) k を偶数とする. (2.5) により

$$p_{mk} = p_{m(k-1)+m} = p_{m(k-1)}p_m + dq_{m(k-1)}q_m$$

である. (P2) ⇒ (P1) により $p_{m(k-1)}$ は p_m の倍数であり, (1) により d, q_m は p_m と互いに素であるから, p_m, p_{mk} の最大公約数 g は $p_m, q_{m(k-1)}$ の最大公約数に等しく, よって g は $p_{m(k-1)}, q_{m(k-1)}$ の公約数であるから, $g = 1$ である.

(3) (P1) ⇒ (P2): p_n が p_m で割り切れるとして, $d \neq 2$ または $m \neq 1$ であるとする. 命題 4 により, $p_m > 1$ であることに注意する. n を m で割った商を k, 余りを r とおく.

ここで, k が偶数であるとして, $k = 2^e k'$ (k': 奇数) とおく. (2.5) により,

$$p_n = p_{mk+r} = p_{mk}p_r + dq_{mk}q_r$$

である. (2.10) により $q_{mk} = 2p_{mk/2}q_{mk/2}$ であり, これを合計 e 回繰り返すと q_{mk} は $p_{mk'}$ で割り切れることがわかる. さらに (P2) ⇒ (P1) により $p_{mk'}$ は p_m で割り切れるから, q_{mk} は p_m で割り切れる. (2) により p_{mk} は p_m と互いに素であり, $0 < p_r < p_m$ により p_r は p_m で割り切れないから, p_n は p_m で割り切れない. これは矛盾である.

よって, k は奇数である. (2.5) により,

$$p_n = p_{mk+r} = p_{mk}p_r + dq_{mk}q_r$$

である. (P2) ⇒ (P1) により p_{mk} は p_m で割り切れるから, $dq_{mk}q_r$ は p_m で割り切れる. p_m, q_{mk} の最大公約数 g は, p_{mk}, q_{mk} の公約数であるから, $g = 1$ である. よって, d, q_{mk} は p_m と互いに素であるから, q_r は p_m で割り切れる. さらに命題 4 により $0 \leqq q_r < q_m < p_m$ であるから $r = 0, n = mk$ であり, n は m で割り切れる.

(4) (Q2) ⇒ (Q1): k を正の整数とする.

$$\frac{\varepsilon^{mk} - \tilde{\varepsilon}^{mk}}{2\sqrt{d}} = \frac{\varepsilon^{m} - \tilde{\varepsilon}^{m}}{2\sqrt{d}}(\varepsilon^{m(k-1)} + \cdots + \tilde{\varepsilon}^{m(k-1)})$$

であるから, (2.3) により

$$\frac{q_{mk}}{q_m} = \varepsilon^{m(k-1)} + \cdots + \tilde{\varepsilon}^{m(k-1)} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$$

である. よって, q_{mk} は q_m で割り切れる.

(Q1) ⇒ (Q2): q_n が q_m で割り切れるとする. n を m で割った商を k, 余りを r とおく. このとき, (2.6) により

$$q_n = q_{mk+r} = p_{mk}q_r + q_{mk}p_r$$

であり, (Q2) ⇒ (Q1) により q_{mk} は q_m で割り切れるから, $p_{mk}q_r$ は q_m で割り切れる. p_{mk}, q_m の最大公約数 g は, p_{mk}, q_{mk} の公約数であるから, $g = 1$ である. よって, p_{mk} は q_m と互いに素であるから, q_r は q_m で割り切れる. さらに $0 \leqq q_r < q_m$ であるから, $r = 0, n = mk$ であり, n は m で割り切れる. □

定理 1 の証明では, 次の和, 差を積に変換する公式が活躍する.

命題 6. 任意の正の整数 i, j に対して,

$$q_{(2i-1)+(4j-2)} + q_{2i-1} = 2p_{2(i+j-1)}q_{2j-1}, \tag{2.11}$$
$$q_{(2i-1)+(4j-2)} - q_{2i-1} = 2q_{2(i+j-1)}p_{2j-1}, \tag{2.12}$$
$$q_{(2i-1)+4j} + q_{2i-1} = 2q_{2(i+j)-1}p_{2j}, \tag{2.13}$$
$$q_{(2i-1)+4j} - q_{2i-1} = 2p_{2(i+j)-1}q_{2j} \tag{2.14}$$

が成り立つ.

証明. 奇数 n に対して $\varepsilon^n\tilde{\varepsilon}^n = (\varepsilon\tilde{\varepsilon})^n = (-1)^n = -1$ であることに注意する.

$$(\varepsilon^{2(i+j-1)} + \tilde{\varepsilon}^{2(i+j-1)})(\varepsilon^{2j-1} - \tilde{\varepsilon}^{2j-1}) = (\varepsilon^{(2i-1)+(4j-2)} - \tilde{\varepsilon}^{(2i-1)+(4j-2)}) + (\varepsilon^{2i-1} - \tilde{\varepsilon}^{2i-1}),$$
$$(\varepsilon^{2(i+j-1)} - \tilde{\varepsilon}^{2(i+j-1)})(\varepsilon^{2j-1} + \tilde{\varepsilon}^{2j-1}) = (\varepsilon^{(2i-1)+(4j-2)} - \tilde{\varepsilon}^{(2i-1)+(4j-2)}) - (\varepsilon^{2i-1} - \tilde{\varepsilon}^{2i-1}),$$
$$(\varepsilon^{2(i+j)-1} - \tilde{\varepsilon}^{2(i+j)-1})(\varepsilon^{2j} + \tilde{\varepsilon}^{2j}) = (\varepsilon^{(2i-1)+4j} - \tilde{\varepsilon}^{(2i-1)+4j}) + (\varepsilon^{2i-1} - \tilde{\varepsilon}^{2i-1}),$$
$$(\varepsilon^{2(i+j)-1} + \tilde{\varepsilon}^{2(i+j)-1})(\varepsilon^{2j} - \tilde{\varepsilon}^{2j}) = (\varepsilon^{(2i-1)+4j} - \tilde{\varepsilon}^{(2i-1)+4j}) - (\varepsilon^{2i-1} - \tilde{\varepsilon}^{2i-1})$$

であるから, 両辺を $2\sqrt{d}$ で割ると, (2.3) により求める等式が得られる. □

3 方程式の整数解

この節では, 定理 1 を示す.

補題 1. d を平方因数をもたない正の整数とする. $x^2 - dy^2 = -1$ が整数解 $(x, y) = (a, a'), (b, b')$ をもつとき, $(\star)$ は有理数解

$$\pm\left(a, b, \frac{ab' + a'b}{b' + a'}\right),\ \pm\left(a, b, \frac{ab' - a'b}{b' - a'}\right)$$

をもつ.

証明. $a^2 - da'^2 = b^2 - db'^2 = -1$ として

$$(a - c)^2 db'^2 = (b - c)^2 da'^2 \quad \text{つまり} \quad (a - c)b' = \pm(b - c)a'$$

を c について解くと,

$$c = \frac{ab' + a'b}{b' + a'},\ \frac{ab' - a'b}{b' - a'}$$

が得られる. □

定理 1 の証明. $(\star)$ の非自明な整数解の候補は補題 1 の有理数解で尽くされる. 以下, この有理数解について,

$$c_+ = \frac{ab' + a'b}{b' + a'}, \quad c_- = \frac{ab' - a'b}{b' - a'}$$

が整数になる条件を考える. d が一般の場合には $p_n^{(d)}, q_n^{(d)}$ の右肩の添え字 (d) は省略する.

(i) $a = p_{2i-1}, b = p_{(2i-1)+(4j-2)}$ のとき.

- (2.6), (2.11), (2.10) により

  $$c_+ = \frac{q_{4(i+j-1)}}{2p_{2(i+j-1)}q_{2j-1}} = \frac{q_{2(i+j-1)}}{q_{2j-1}}$$

  であるから, 定理 3 (4) により

  $$c_+ \in \mathbb{Z} \iff q_{2j-1} \mid q_{2(i+j-1)} \iff 2j - 1 \mid 2(i + j - 1) \iff 2j - 1 \mid 2i - 1$$

  が成り立つ. このとき, $j = m, 2i - 1 = (2m - 1)(2n - 1)$ とおくと,

  $$(a, b, c_+) = \left(p_{(2m-1)(2n-1)}, p_{(2m-1)(2n+1)}, \frac{q_{2(2m-1)n}}{q_{2m-1}}\right)$$

  となる.

- (2.8), (2.12), (2.10) により
$$c_- = -\frac{q_{4j-2}}{2q_{2(i+j-1)}p_{2j-1}} = -\frac{q_{2j-1}}{q_{2(i+j-1)}}$$
であり, 分子より分母の方が大きいから, c_- は整数になり得ない.

(ii) $a = p_{2i-1}, b = -p_{2i-1+4j-2}$ のとき.

- (2.8), (2.11), (2.10) により
$$c_+ = -\frac{q_{4j-2}}{2p_{2(i+j-1)}q_{2j-1}} = -\frac{p_{2j-1}}{p_{2(i+j-1)}}$$
であり, 分子より分母の方が大きいから, c_+ は整数になり得ない.
- (2.6), (2.12), (2.10) により
$$c_- = \frac{q_{4(i+j-1)}}{2q_{2(i+j-1)}p_{2j-1}} = \frac{p_{2(i+j-1)}}{p_{2j-1}}$$
であるから, 定理 3 (3) により
$$c_- \in \mathbb{Z} \iff p_{2j-1} \mid p_{2(i+j-1)} \iff d = 2 \text{ かつ } j = 1$$
が成り立つ (偶数 $2(i+j-1)$ は奇数 $2j-1$ の奇数倍にはなり得ない). このとき, $i = n$ とおくと,
$$(a, b, c_-) = (p^{(2)}_{2n-1}, -p^{(2)}_{2n+1}, p^{(2)}_{2n})$$
となる.

(iii) $a = p_{2i-1}, b = p_{2i-1+4j}$ のとき.

- (2.6), (2.13), (2.10) により
$$c_+ = \frac{q_{4(i+j)-2}}{2q_{2(i+j)-1}p_{2j}} = \frac{p_{2(i+j)-1}}{p_{2j}}$$
であり, 奇数 $2(i+j)-1$ は偶数 $2j$ の奇数倍にはなり得ないから, 定理 3 (3) により $p_{2(i+j)-1}$ は p_{2j} で割り切れず, c_+ は整数になり得ない.
- (2.8), (2.14), (2.10) により
$$c_- = -\frac{q_{4j}}{2p_{2(i+j)-1}q_{2j}} = -\frac{p_{2j}}{p_{2(i+j)-1}}$$
であり, 分母より分子の方が大きいから, c_- は整数になり得ない.

(iv) $a = p_{2i-1}, b = -p_{2i-1+4j}$ のとき.

- (2.8), (2.14), (2.10) により
$$c_+ = -\frac{q_{4j}}{2q_{2(i+j)-1}p_{2j}} = -\frac{q_{2j}}{q_{2(i+j)-1}}$$
であり, 分子より分母の方が大きいから, c_+ は整数になり得ない.
- (2.6), (2.13), (2.10) により
$$c_- = \frac{q_{4(i+j)-2}}{2p_{2(i+j)-1}q_{2j}} = \frac{q_{2(i+j)-1}}{q_{2j}}$$
であり, 奇数 $2(i+j)-1$ は偶数 $2j$ の整数倍になり得ないから, 定理 3 (4) により $q_{2(i+j)-1}$ は q_{2j} で割り切れず, c_- は整数になり得ない.

さらに符号の付け替えを考えると, $(\star)$ の任意の非自明な整数解は, a, b の入れ替えを許せば, (1.1), (1.2) の形に表されると結論される. 上記の議論により, この形の (a, b, c) で $(\star)$ の整数解でないものはないことも示されている. □

4 方程式の有理数解

この節では, 定理 2 を示す.

補題 2 ([5, Theorem 6])**.** 正の整数 w が

$$w = 2^{e_0} {p_1}^{e_1} \cdots {p_r}^{e_r} \quad (p_1, \cdots, p_r\text{: 相異なる奇素数},\ e_0, e_1, \cdots, e_r\text{: 非負整数})$$

と素因数分解されるとする. このとき, ピタゴラスの方程式 $v^2 + w^2 = v'^2$ の正の整数解の個数 N は,

$$N = \begin{cases} \dfrac{(2e_0 - 1)(2e_1 + 1)\cdots(2e_r + 1) - 1}{2} & (e_0 > 0), \\ \dfrac{(2e_1 + 1)\cdots(2e_r + 1) - 1}{2} & (e_0 = 0) \end{cases} \tag{4.1}$$

である.

証明. 正の整数 v, v' が $v^2 + w^2 = v'^2$ を満たすとする. $v^2 + w^2 = v'^2$ は

$$v'^2 - v^2 = w^2 \quad \text{つまり} \quad (v' + v)(v' - v) = w^2$$

と変形できる. $s = v' + v$, $t = v' - v$ とおく. このとき, 正の整数解 (v, v') は,

$$(v, v') = \left(\frac{s - t}{2}, \frac{s + t}{2}\right)$$

と表され, $st = w^2$, $s > t > 0$ を満たし, w と偶奇が等しい整数のペア (s, t) と 1 対 1 に対応する. このような約数のペアの個数は, $w^2/4$ または w^2 の正の約数の個数から $w/2$ または w の 1 個を引いた個数の半分であるから, 求める解の個数は (4.1) のように表される. □

定理 2 の証明. $(\star)$ は, $a = x/w$, $b = y/w$, $c = z/w$ を代入して整理すると,

$$(x - z)^2(y^2 + w^2) = (y - z)^2(x^2 + w^2) \tag{$\star$)$'$ \quad (}$$

と変形できる. w が 4 以外の 4 の倍数, 奇数の合成数の 2 倍, 奇数の合成数であるとき, (4.1) の値は 2 以上になるから, $v^2 + w^2 = v'^2$ は相異なる正の整数解 $(v, v') = (x, x'), (y, y')$ をもつ. $x^2 + w^2 = x'^2$, $y^2 + w^2 = y'^2$ を $(\star)'$ に代入すると

$$(x - z)^2 y'^2 = (y - z)^2 x'^2 \quad \text{つまり} \quad (x - z)y' = \pm(y - z)x'$$

となるから, これを z について解くと

$$z = \frac{xy' + x'y}{y' + x'}, \frac{xy' - x'y}{y' - x'}$$

となる. これを $c = z/w$ に代入して符号の付け替えを考えると, 求める有理数解 (1.3) が得られる. □

参考文献

[1] E. J. Barbeau, *Pell's Equation*, Problem Books in Mathematics, Springer, New York, 2003.

[2] R. D. Carmichael, On the numerical factors of the arithmetic forms $\alpha^n \pm \beta^n$, *Ann. of Math.*, vol. 15, no. 1, 1913, 30–70.

[3] T. Koshy, *Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications*, Springer, New York, 2014.

[4] R. C. Ochieng, C. J. Chikunji, V. Onyango-Otieno, Pythagorean triples with common sides, *J. of Math.*, 2019, 1–8.

[5] A. Tripathi, On Pythagorean triples containing a fixed integer, *The Fibonacci Quarterly*, vol. 46/47, no. 4, 2008/09, 331–340.

[6] シェルピンスキー著, 銀林浩訳,『ピタゴラスの三角形』, 東京図書, 1993.